



# Forblad

**Pladers beregning ved Differensligninger**

**P.M.Frandsen**

**Tidsskrifter**

**BSM 1-4 Bygningsstatiske Meddelelser**

**1929**

# PLADERS BEREGNING VED DIFFERENS- LIGNINGER<sup>1)</sup>.

Af P. M. FRANDSEN.

For middeltukke plane Plader med konstant Tykkelse er den fundamentale Differentialligning forlængst angivet først af *Lagrange* 1813 (dog uden Bevis) og senere (med fuldstændig Begrundelse) af *Poisson* 1829. Undersøgelserne vedrørende Randbetingelsernes Formulering er ligeledes afsluttede navnlig ved Arbejder af *Poisson* 1829, *Kirchhoff* 1850 samt især vedrørende Vridningsmomenters Virkning paa Pladeranden af *Kelvin & Tait* 1867.

*Lagrange's* Ligning er af 4. Orden, og de første Løsninger af denne skyldes *Navier* 1820 og *Poisson* 1829, og siden da er en omfangrig Litteratur opvokset om dette Emne. Skønt Pladeligningerne i flere Henseender bliver analoge med de tilsvarende Ligninger for lige Bjælkens Momenter og Nedbøjninger, savnes dog endnu tilfredsstillende Beregningsmetoder for Plader i Lighed med de for Bjælker kendte Metoder, hvilke sidste ved Anvendelse af indirekte Belastning kan udledes fra Differentielligninger. Differentielligninger for Plader er ogsaa forsøgt navnlig af *N. J. Nielsen*<sup>2)</sup> og *H. Marcus*<sup>3)</sup>, uden at man dog kan sige, at Sagen endnu er klaret til Bunds. Et Forsøg paa yderligere at klarlægge Forholdene vedrørende Pladers Differentielligninger skulde dette Arbejde være.

## *Pladers Differentielligninger.*

For en plan vandret Plade med konstant Tykkelse  $h$  og paavirket af lodrette Kræfter (Belastninger og Reaktionen), bliver Snitkræfterne i Pladens Normalsnit alene Bøjnings- og Vridningsmomenter samt lodrette Forskydningskræfter.

<sup>1)</sup> Forelæst i Selskabets Møde den 16. April 1929.

<sup>2)</sup> *N. J. Nielsen*: Bestemmelse af Spændinger i Plader ved Anvendelse af Differentielligninger (1918) København 1920.

<sup>3)</sup> *H. Marcus*: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf der Berechnung elastischer Platten. Armierter Beton 1919.

I Fig. 1 er vist et infinitesimalt Element af en Plade henført til et retvinklet Koordinatsystem med Begyndelsespunkt i Midterplanen,  $X$ - og  $Y$ -Aksene beliggende i denne og  $Z$ -Aksen vinkelret derpaa. Pladeelementet er løsskaaret ved fire Normalsnit parvis parallelle med  $XZ$ - og  $YZ$ -Planen. Snitkræfterne er angivne ved deres Værdier pr.

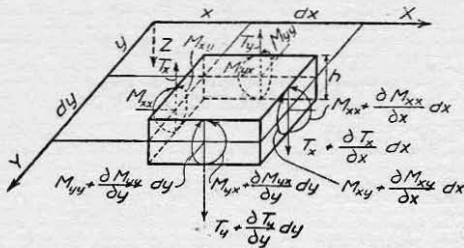


Fig 1.

Længdenhed af Snittene og antages at variere kontinuert fra Snit til Snit. Af Definitionen for Snitkræfter følger for Vridningsmomenterne, at  $M_{xy} = M_{yx}$ .

Idet den givne lodrette Belastning er  $p$  pr. Arealenhed, faas med de i Fig. 1 angivne Betegnelser og

positive Retninger for Snitkræfterne følgende Ligevægtsligninger:

Ved Projektion paa  $Z$ -Aksen

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} dy dx + p dx dy = 0.$$

Ved Momenter om Elementets Kanter

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx - T_x dy dx = 0,$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dy dx - T_y dx dy = 0,$$

hvoraf ved Reduktion

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = -p \quad (1)$$

og

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \\ T_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}. \end{aligned} \right\} (2)$$

Snitkræfternes Variation for forskellige Normalsnit gennem samme Punkt af en Plade faas ved Betragtning af det i Fig. 2 viste Pladeelement.

Idet Snitkræfterne i det skraa Normalsnit  $s$  (Længde  $ds$ ) med Normal  $n$  ( $\angle xn = \theta$ ) kaldes  $M_{nn}$ ,  $M_{ns}$  og  $T_n$ , faas Ligevægtsligningerne

$$\begin{aligned} T_n ds &= T_x dy + T_y dx, \\ M_{nn} ds &= (M_{xx} dy + M_{yx} dx) \cos \theta + (M_{yy} dx + M_{xy} dy) \sin \theta, \\ M_{ns} ds &= -(M_{xx} dy + M_{yx} dx) \sin \theta + (M_{yy} dx + M_{xy} dy) \cos \theta, \end{aligned}$$

hvoraf findes ved Reduktion:

$$T_n = T_x \cos \theta + T_y \sin \theta, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{nn} &= M_{xx} \cos^2 \theta + M_{yy} \sin^2 \theta + 2M_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ M_{ns} &= (M_{yy} - M_{xx}) \sin \theta \cos \theta + M_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \right\} (4)$$

Af Ligningen for  $M_{nn}$  og den tilsvarende for Bøjningsmomentet  $M_{ss}$  paa et derpaa vinkelret Snit ( $\angle xs = 90 + \theta$ ) faas ved Addition, at

$$M_{nn} + M_{ss} = M_{xx} + M_{yy}, \quad (5)$$

hvorved angives, at

Summen af Bøjningsmomenterne i to paa hinanden vinkelrette Normalsniter konstant.

Deformationen af Pladens Midterflade bestaar i, at den antager Form af en svagtkrummet kontinuert Flade, Nedbøjningsfladen, hvis Ordinater  $u$  (positive med  $Z$ ) maalte fra  $XY$ -Planen kan behandles som (uendelig) smaa i Forhold til Pladens Udstrækning.

For det i Fig. 1 viste Pladeelement udledes Nedbøjningsfladens Krumninger  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  og  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  samt Vridningen  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  direkte af Snitkræfterne ved Superposition af Virkningerne af de to Bøjningsmomenter  $M_{xx}$  og  $M_{yy}$  for sig og af Virkningerne af de to Vridningsmomenter  $M_{xy}$  og  $M_{yx}$  for sig, idet Enkeltvirkningerne er som de fra bøjede Bjælker og vredne Prismer kendte.

Kaldes Materialets Elasticitetskoefficienter  $E$  og  $G$  og Poisson's Forhold  $\nu$ , faas, idet  $I = \frac{1}{12} h^3$ , følgende Enkeltkrumninger:

$$\text{fra } M_{xx} \text{ alene } - \frac{M_{xx}}{EI} \text{ i } XZ\text{-Planen og } + \nu \frac{M_{xx}}{EI} \text{ i } YZ\text{-Planen,}$$

$$\text{fra } M_{yy} \text{ alene } + \nu \frac{M_{yy}}{EI} \text{ i } XZ\text{-Planen og } - \frac{M_{yy}}{EI} \text{ i } YZ\text{-Planen.}$$

$$\nu = \frac{1}{m}$$

De resulterende Krumninger bliver da:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{EI} (M_{xx} - \nu M_{yy}) \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{1}{EI} (M_{yy} - \nu M_{xx}). \quad (6)$$

Fra  $M_{xy}$  og  $M_{yx}$  faas Vridningsvinklen

$$\vartheta = \frac{2M_{xy}}{\frac{2}{3} G h^3} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \cdot \frac{2M_{xy}}{\frac{1}{3} h^3} = (1 + \nu) \frac{M_{xy}}{EI} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\nu = \frac{d\vartheta}{G \vartheta}$$

eller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = - (1 + \nu) \frac{M_{xy}}{EI}. \quad (7)$$

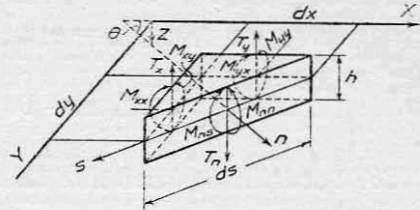


Fig. 2.

For Snitmomenterne findes dernæst, idet  $D = \frac{EI}{1 - \nu^2}$ :

$$\left. \begin{aligned} M_{xx} &= -D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ M_{yy} &= -D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} (8)$$

For Forskydningskræfterne faas endelig af (8) indsat i (2):

$$T_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad T_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (9)$$

Ved Indsættelse af  $T_x$  og  $T_y$  fra (9) i (1) fremkommer en partiel Differentialligning for Pladens Nedbøjninger:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \quad (10)$$

hvilket er *Lagrange's* Ligning.

For Plader kan der ligesom for Bjælker angives en anden Form for Differentialligningen (10), hvorved den spaltes i to partielle Differentialligninger af 2' Orden, hvilket sker ved at indføre Skalar-Momentet

$$U = \frac{M_{xx} + M_{yy}}{1 + \nu}, \quad (11)$$

som kaldes saaledes, fordi det i Følge (5) er det samme for alle orthogonale Normalsnitpar i samme Punkt. Ved Addition af de to første Ligninger (8) faas nu som Differentialligning for Nedbøjningsfladen  $u$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{U}{D}. \quad (12)$$

Differentialligningen for Skalar-Momentfladen  $U$  faas af (1), (12) og (9):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -p. \quad (13)$$

Ligningerne (12) og (13) kaldes *Poisson's* Ligninger.

Baade  $u$  og  $U$  er herefter at opfatte som Skalar-Potentialer og deres Gradienter, Tangentvinklerne  $t = \text{grad } u$  og Forskydningskræfterne  $T = \text{grad } U$  som Vektorer med Aksekomponenter

$$t_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{og} \quad T_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad T_y = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

For en vilkaarlig Retning  $n$  faas

$$\left. \begin{aligned} t_n &= \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(yn), \\ T_n &= \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(yn). \end{aligned} \right\} 14)$$

Udtrykket for  $T_n$  er ogsaa fundet ovenfor i Ligning (3).

Randbetingelserne for Plader, der er simpelt understøttede paa plane polygonale Randkurver, bliver

$$U=0 \text{ og } u=0. \quad (15)$$

Saadanne Plader er da statisk bestemte i samme Forstand som simpelt understøttede Bjælker. I dette Tilfælde kan nemlig de to Poisson'ske Differentialligninger (12) og (13) løses hver for sig derved, at man først bestemmer Skalarmomentfladen  $U$  og derefter Nedbøjningsfladen  $u$ . Ved andre Randkurver<sup>1)</sup> end Polygoner er simpelt understøttede Plader statisk ubestemte ligesom indspændte og kontinuerlige Plader samt Plader med frie Rande.

Et anskueligt Billede af  $U$ - og  $u$ -Fladerne for statisk bestemte Plader faas ved Nedbøjningsfladerne for en over Pladens Randkurve med konstant Spænding udspændt elastisk Hinde (Membran), naar den belastes med henholdsvis  $p$  og  $\frac{U}{D}$  pr. Arealenhed. For saadanne Nedbøjningsflader<sup>2)</sup> er Nedbøjningsordinaterne ved Randen nemlig Nul ligesom Randværdierne af  $U$  og  $u$  for statisk bestemte Plader, og Differentialligningerne vises let at have samme Form som (12) og (13). De her omtalte Nedbøjningsflader kaldes i det følgende *Strækflader*.

### Hjælpesætninger.

Ved  $\bar{A}$  betegnes en kontinuert Vektorfunktion (Aksekomponenter  $A_x, A_y, A_z$  i et retvinklet Koordinatsystem  $X, Y, Z$ ).

Ved  $U$  betegnes en kontinuert Skalarfunktion.

Divergens af en Vektor  $\bar{A}$  er en Skalar, som defineres ved

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

<sup>1)</sup> Ved saadanne er Randbetingelsen for  $U$ , idet Kurven kaldes  $s$ , dens Normal  $n$  og Krumningsradien  $\rho$ ,

$$U = M_{nn} - D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} \right).$$

<sup>2)</sup> Sml. Prandtl's Spændingsflade ved Vridning. Phys. Zeitschrift 1903, Bd. 4.

Gradienten af en Skalar  $U$  er en Vektor, som betegnes

$$\text{grad } U$$

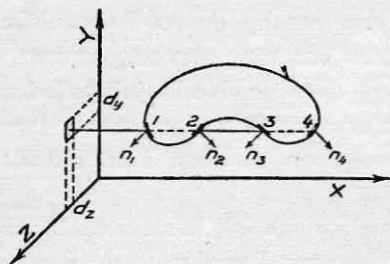
og har Aksekomponenterne  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial z}$ .

Divergens af en Gradient  $\text{grad } U$  er en Skalar, som betegnes

$$\text{div grad } U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U.$$

Tegnet  $\Delta$  kaldes *Laplace's Operator*.

For et lukket Rum  $R$  med Overflade  $O$  (Normaler  $n$ ), som vist i Fig. 3, kan Rumintegralet af  $\text{div } \bar{A}$



$$\int_R \text{div } \bar{A} \cdot dR = \int_R \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz$$

ved ledvis Integration omformes til Overfladeintegralet

$$\int_O (A_x \cos(xn) + A_y \cos(yn) + A_z \cos(zn)) dO,$$

hvor

$$A_n = A_x \cos(xn) + A_y \cos(yn) + A_z \cos(zn)$$

betyder Projektionen af  $\bar{A}$ 's Overfladeværdier ind paa Overfladenormalen  $n$ .

Altsaa

$$\int_R \text{div } \bar{A} \cdot dR = \int_O A_n \cdot dO. \quad (16)$$

Denne Integralformel kaldes *Gauss's Ligning*.

Er i *Gauss's Ligning* Vektoren  $\bar{A}$  specielt en Gradient  $\text{grad } U$ , bliver

$$\text{div } \bar{A} = \text{div grad } U = \Delta U$$

og

$$A_n = \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial U}{\partial y} \cos(yn) + \frac{\partial U}{\partial z} \cos(zn),$$

saa at *Gauss's Ligning* bliver:

$$\int_R \Delta U \cdot dR = \int_O \frac{\partial U}{\partial n} \cdot dO. \quad (17)$$

Er Vektoren  $\bar{A}$  specielt et Produkt af en Skalar  $U$  og en Gradient  $\text{grad } U_1$ , bliver *Gauss's Ligning*:

$$\int_R (U \Delta U_1 + (\text{grad } U_1, \text{grad } U)) \cdot dR = \int_O U \frac{\partial U_1}{\partial n} \cdot dO.$$

Ved Ombytning af  $U$  og  $U_1$  heri udledes paa samme Maade

$$\int_R (U_1 \Delta U + (\text{grad } U, \text{grad } U_1)) \cdot dR = \int_O U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \cdot dO.$$

Idet Skalarproduktet  $\rightarrow a \cdot b = b \cdot a$

$$(\text{grad } U_1, \text{grad } U) = \frac{\partial U_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = (\text{grad } U, \text{grad } U_1),$$

faas ved Subtraktion af de to sidste Integralformler:

$$\int_R (U \Delta U_1 - U_1 \Delta U) dR = \int_O \left( U \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \right) dO. \quad (18)$$

Denne Integralformel kaldes *Green's Ligning*<sup>1)</sup>.

Naar  $U$  og  $U_1$  er Funktioner af 2 uafhængige Variable  $x$  og  $y$  (som ved Plader) indenfor en plan Flade  $f$  begrænset af Randkurven  $s$  (Normaler  $n$ ), som vist i Fig. 4, bliver *Green's Ligning*

$$\int_f (U \Delta U_1 - U_1 \Delta U) df = \int_s \left( U \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (19)$$

hvor venstre Side nu er et Fladeintegral, som udstrækkes over alle Areelementer af Fladen  $f$ , medens højre Side er et Linieintegral, som udstrækkes over alle Elementer af Randkurven  $s$ .

Den Retningsafledede for Randkurvenormalen  $\frac{\partial}{\partial n}$  og *Laplace's Operator*  $\Delta$  betegner her henholdsvis

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial x} \cos(xn) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(yn), \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Naar  $U$  og  $U_1$  er Funktioner af 1 Variabel  $x$  (som ved lige Bjælker) indenfor en Strækning  $AB$  af  $X$ -aksen (se Fig. 5), faar *Green's Ligning* Formen

1) Beviset her er nærmest taget fra: Gans: Einführung in die Vektoranalysis.

*Green's Ligning* er en Udvidelse af *Maxwell-Betti's Sætning*, og Beviset kan for Plader føres ved Hjælp af Arbejdslikningen paa sædvanlig Maade.

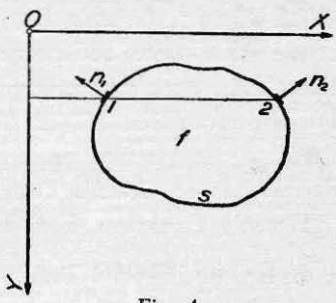


Fig. 4.

Forholdningen af et Punkt  $k$  af en elementær flade  $f$  i Punktet  $k$  er lig forholdningen af  $k$  for Belastningen  $P$  i Punktet  $i$ . De Forholdninger af elementærerne med til elementærerne  $U$  vil det kaldes, siger at elementærerne (Flader) for Belastningsenheden  $P_0 = 1$  fremstiller influensflader for elementærerne.



$$\int_A^B (U \Delta U_1 - U_1 \Delta U) dx = \left| U \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial U}{\partial n} \right|_A^B, \quad (20)$$



Fig. 5.

hvor venstre Side er et Linieintegral for Strækningen AB og højre Side Differensen mellem Grænseværdierne for de indgaaende Størrelser

ved B og A, idet  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{d}{dx}$  og  $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ .

### Green'ske Funktioner for Plader.

Green's Ligning (19) frembyder sig umiddelbart til Løsning af begge de Poisson'ske Differentialligninger (12) og (13), som ved Benyttelse af Laplace's Operator skrives:

$$\Delta U = -p \quad \text{og} \quad \Delta u = -\frac{U}{D}. \quad (21)$$

Af de to i Green's Ligning indgaaende Funktioner  $U$  og  $U_1$  kræves, at de skal være eentydige og kontinuerte indenfor Pladen, medens de ellers kan være uafhængige af hinanden. For at faa explicite Udtryk for Funktionsværdien  $U_a$  af  $U$  i et vilkaarligt Punkt  $a$  vælges  $U_1$  som et dertil egnet partikulært Integral af Ligningen  $\Delta U_1 = 0$ . Funktioner af denne Art er Green's Funktioner.

Green's Funktion  $G$  tilfredsstiller Ligningen  $\Delta G = 0$  i alle Pladens Punkter (undtagen i Punkt  $a$ , hvor  $\Delta G = -\frac{1}{df}$ ) og har Værdien Nul langs Pladens Randkurve  $s$  (Normal  $n$ ).

Af Green's Ligning (19) faas da:

$$U_a \left( -\frac{1}{df} \right) - \int_f G \Delta U df = \int_s U \frac{\partial G}{\partial n} ds.$$

For en vilkaarligt understøttet Plade faas heraf, naar  $U$  f. Eks. betyder Skalarmomentet for en Belastning  $p$ , og altsaa  $\Delta U = -p$

$$U_a = \int_f G \cdot p df + \int_s U \left( -\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (22)$$

Sættes heri

$$U_{a,0} = \int_f G \cdot p df, \quad (23)$$

faas

$$U_a = U_{a,0} + \int_s U \left( -\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (24)$$

En Funktion  $G$  i Pladen skal tilfredsstille følgende Betingelser:  
 1) I alle Omraader væk fra  $a$  og  $s$  skal  $G$  være harmonisk og have kont. afledede, kun i et  
 enkeltstuepunkt dette ikke være tilfældet  
 2) Afstanden mellem  $a$  og et andet Punkt  $q$  skal  $G + \frac{1}{4\pi r}$  være harmonisk i hele Omraadet  
 3) I hele Omraadet skal  $\Delta G = 0$   
 4) Værdien af  $G$  i Omraadet skal  $G = 0$

Specielt for en simpelt understøttet polygonal Plade, hvor  $U = 0$  langs Randen, bliver

$$U_a = U_{a,0} = \int_f G \cdot pdf.$$

I Analogi med tilsvarende Betegnelser i Bjælketeorien kaldes  $U_{a,0}$  det simple Skalar-Moment i Punktet  $a$ , og  $G$  ses da at være Influenzfunktionen (=fladen) for Skalar-Momentet<sup>1)</sup>.

Samme Betragtninger kan anstilles ved Bestemmelse af Nedbøjningen  $u_a$ , efter at Skalar-Momenterne  $U$  er bestemt, blot at man nu belaster med  $\frac{U}{D}$  og bestemmer  $u_a$  som Skalar-Moment for denne Belastning.

Det er i denne Forbindelse værd at lægge Mærke til, at da  $G$  tilfredsstiller en Poisson'sk (Laplace'sk) Ligning

$$\Delta G = -k \left( k = 0 \text{ undtagen i Punkt } a, \text{ hvor } k = \frac{1}{df} \right)$$

og er Nul langs Understøtningskurven  $s$ , kan dens Funktionsværdier (ligesom  $U$  og  $u$  for statisk bestemte Plader) opfattes som Strækfladeordinater for Belastningen  $k$ . Kraften  $k \cdot df = 1$  kaldes den tænkte Belastning.

Ved Plader bliver  $G$ 's Funktionsværdier som bekendt uendelige i Omegnen af det betragtede Punkt  $a$ , og da Bestemmelsen af  $G$  ofte er omstændelig og tilmed kun gennemførlig for specielle Randkurveformer, er Funktionen  $G$  for Plader ikke umiddelbart praktisk anvendelig i denne Form. Ved Bjælker faas derimod endelige Ordinatorer overalt, idet Green's Funktion her er den bekendte Influenstrekanth (for det simple Moment) med Toppunkt i det betragte Punkt  $a$ .

1) Anvendes (24) paa en lige vandret simpelt understøttet Bjælke  $AB$  af Længde  $l$ , paavirket af en lodret Belastning  $p$  samt af Momenterne  $M_A$  og  $M_B$  ved Enderne, faas af (20), idet  $U_a$  her bliver Momentet  $M_a$  i Punkt  $a$  med Afstandene  $x$  og  $x'$  fra henholdsvis  $A$  og  $B$ , den bekendte Formel

$$M_a = M_{a,0} + M_A \frac{x'}{l} + M_B \frac{x}{l},$$

hvor

$$M_{a,0} = \int G \cdot p \, dx,$$

og  $G$  Influenzfunktionen (=linien) for det simple Moment  $M_{a,0}$ .

Med tænkt indirekte Belastning og Knudepunkter alene i  $A, a$  og  $B$  faas, naar  $P_a$  er Knudepunktstrykket i  $a$ , og altsaa  $M_{a,0} = P_a \frac{xx'}{l}$ , Momentformlens Differensform

$$-P_a = \frac{M_A - M_a}{x} - \frac{M_a - M_B}{x'}$$



$$\int G \cdot p \, dx = p \int_0^x \frac{x'}{l} x \, dx + p \int_x^l \frac{x}{l} x' \, dx = p \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x'^2}{2} \right) = \frac{1}{2} p x x'$$

Grunden til denne Forskel er, at de to Tilfælde kun tilsyneladende er analoge. En nærmere Betragtning viser, at der til den tænkte Belastning ved Bjælker (betragtede som Pladestrimler med cylindrisk Deformation) svarer en Liniebelastning ved Plader (og ikke en Punktbelastning). Ved Bestræbelser, der gaar ud paa at bringe Pladers Beregning paa samme Form som Bjælkens, ligger det da nær at forsøge med saadanne Green'ske Funktioner, der fremstilles ved Strækflader for Liniebelastninger.

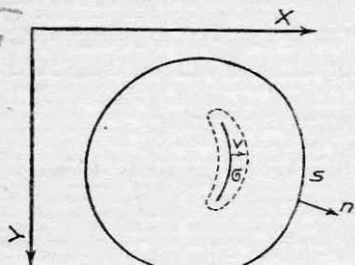


Fig. 6.

Green'ske Funktioner svarende til Liniebelastninger kaldes i det følgende  $F$ . I Fig. 6 er vist en Liniebelastning  $\pi_\sigma$  pr. Længdeenhed af Kurven  $\sigma$  (Normal  $\nu$ ) for en Strækflade med Understøtningskurve  $s$  (Normal  $n$ ) lig Pladens Understøtningskurve.

Funktionen  $F$  skal da tilfredsstille  $\Delta F = 0$  undtagen paa  $\sigma$  og have Værdien Nul langs  $s$ . Af (19) følger, idet  $\sigma$  udkæres<sup>1)</sup> ved det i

Fig. 6 viste punkterede Snit, som da medregnes til Randintegralet,

$$0 - \int_f F \cdot \Delta U \cdot df = \int_\sigma U_\sigma \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_- - \left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_+ \right] d\sigma + \int_s U_s \frac{\partial F}{\partial n} ds - \int_\sigma F_\sigma \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_- - \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_+ \right] d\sigma.$$

Da

$$\Delta U = -p, \quad \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_- - \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_+ = 0 \quad \text{og} \quad \left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_- - \left( \frac{\partial F}{\partial \nu} \right)_+ = \pi_\sigma,$$

faas

$$\int_f F \cdot p df = \int_\sigma U_\sigma \pi_\sigma d\sigma + \int_s U_s \frac{\partial F}{\partial n} ds$$

eller

$$\int_\sigma U_\sigma \pi_\sigma d\sigma = \int_f F \cdot p df + \int_s U_s \left( -\frac{\partial F}{\partial n} \right) ds. \quad (25)$$

Ligning (25) er ganske analog med (22), men venstre Side udtrykker ikke  $U_\sigma$  explicit.

Som Understøtning for Strækfladen til den tænkte Belastning er man ikke bunden til udelukkende at benytte Pladens Randkurve, men kan til Optagelse af Strækfladens lodrette Lejetryk bruge en vilkaarlig anden lukket Kurve  $s$  (Normal  $n$ ) Reaktionskurven, beliggende i  $XY$ -Planen og indenfor Randkurven, medens denne stadig optager Strækfladens Horizontaltræk.

Idet den tænkte Belastning herved maa anbringes indenfor Reaktionskurven  $s$ , faas henholdsvis for Punktbelastning (for  $G$ ) og Liniebelast-

<sup>1)</sup> Sml. Gans I. c.

ning (for  $F$ ) Formler ganske som (22) og (25), hvis Integraler dog nu kun skal udstrækkes over Omraadet indenfor Reaktionskurven  $s$  og over selve denne.

Fordelen ved Anvendelsen af saadanne indre Reaktionskurver er, at man kan vælge disse vilkaarligt og saa bekvemt som muligt for Funktionerne  $G$  og  $F$ , hvilke nu bliver uafhængige af Formen for Pladens Randkurve.

### Pladers Differensligninger.

#### 1. Reaktionskurven en Cirkel.

Er Reaktionskurven en Cirkel  $s$  med Radius  $\lambda$  (se Fig. 7), faas for en Punktbelastning i Centrum en Green'sk Funktion, som i polære Koordina-  
 ter  $(r, \theta)$  og med Polen i Kraftens An-  
 grebspunkt  $a$  kan skrives



$$G = \frac{1}{2\pi} l \frac{\lambda}{r}. \quad (26)$$

At  $G = 0$  langs  $s$  ( $r = \lambda$ ), ses umiddelbart, og at  $\Delta G = 0$ , vises let ved Differentiation. Da endvidere

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r},$$

ses ogsaa, at den tilsvarende tænkte Belastning er en Enkelkraft 1 i Centrum.

For en Plade med Belastningen  $p$  faas dernæst af (22) for Skalar-Momentet

$$U_a = \int_0^{2\pi} \int_0^\lambda \frac{1}{2\pi} l \frac{\lambda}{r} p r dr d\theta + \int_0^{2\pi\lambda} U_s \left( \frac{1}{2\pi\lambda} \right) ds.$$

Som bekendt Størrelse, naar Belastningen  $p$  er givet, sættes heri:

$$P_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\lambda l \frac{\lambda}{r} p r dr, \quad (27)$$

hvorefter faas:

$$U_a = P_a + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_s d\theta$$

eller

$$P_a = U_a - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_s d\theta. \quad (28)$$

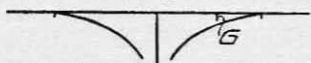
ning (for  $F$ ) Formler ganske som (22) og (25), hvis Integraler dog nu kun skal udstrækkes over Omraadet indenfor Reaktionskurven  $s$  og over selve denne.

Fordelen ved Anvendelsen af saadanne indre Reaktionskurver er, at man kan vælge disse vilkaarligt og saa bekvemt som muligt for Funktionerne  $G$  og  $F$ , hvilke nu bliver uafhængige af Formen for Pladens Randkurve.

### Pladers Differensligninger.

#### 1. Reaktionskurven en Cirkel.

Er Reaktionskurven en Cirkel  $s$  med Radius  $\lambda$  (se Fig. 7), faas for en Punktbelastning i Centrum en Green'sk Funktion, som i polære Koordina-  
 ter  $(r, \theta)$  og med Polen i Kraftens An-  
 grebspunkt  $a$  kan skrives



$$G = \frac{1}{2\pi} l \frac{\lambda}{r}. \quad (26)$$

At  $G = 0$  langs  $s$  ( $r = \lambda$ ), ses umiddelbart, og at  $\Delta G = 0$ , vises let ved Differentiation. Da endvidere

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r},$$

ses ogsaa, at den tilsvarende tænkte Belastning er en Enkelkraft 1 i Centrum.

For en Plade med Belastningen  $p$  faas dernæst af (22) for Skalar-Momentet

$$U_a = \int_0^{2\pi} \int_0^\lambda \frac{1}{2\pi} l \frac{\lambda}{r} p r dr d\theta + \int_0^{2\pi\lambda} U_s \left( \frac{1}{2\pi\lambda} \right) ds.$$

Som bekendt Størrelse, naar Belastningen  $p$  er givet, sættes heri:

$$P_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\lambda l \frac{\lambda}{r} p r dr, \quad (27)$$

hvorefter faas:

$$U_a = P_a + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_s d\theta$$

eller

$$P_a = U_a - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_s d\theta. \quad (28)$$

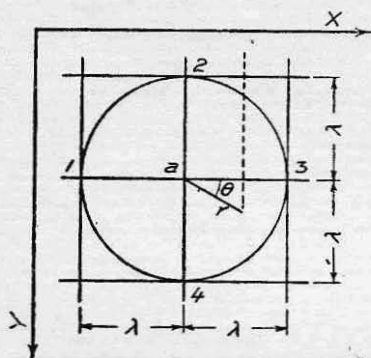


Fig. 7.

Linieintegralet i (28) angiver Middelværdien af  $U$  langs Reaktionskurven  $s$ , og dette kan om ønskes opløses i en Sum af Middelværdier for vilkaarlige Partier af denne. Formel (28) kan derfor anvendes til Danelse af Differensligninger for Middelværdier af  $U$ .

For Punkter af en Plade bestemt ved et Kvadratnet med Maskevidde  $\lambda$  kan man herved gaa frem som vist i Fig. 7 for Partiet om Punkt  $a$ . Idet  $U_1, U_2, U_3$  og  $U_4$  er Middelværdier af  $U$  for hver af de fire Kvadranter af Cirklen, som har Kvadratnetspunkterne 1, 2, 3 og 4 til Midtpunkter, faas af (28)

$$P_a = U_a - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} (U_1 + U_2 + U_3 + U_4)$$

eller

$$\left. \begin{aligned} -4P_a &= +U_1 - 4U_a + U_3. \\ &+ U_2 \\ &+ U_4 \end{aligned} \right\} (29)$$

For Nedbøjningsordinaterne  $u$  faas en lignende Formel, blot at der i (27) sættes  $\frac{U}{D}$  i Stedet for  $p^1$ .

Specielt for en ensformig fordelt Belastning  $p$  faas af (27)  $4P_a = p\lambda^2$ .

Differensligninger af denne Art svarende til en rektangulær Inddeling af Pladen vilde man faa af en *Green'sk* Funktion  $G$  for en elliptisk Reaktionskurve.

## 2. Reaktionskurven et Rektangel.

Er Reaktionskurven et Rektangel, og sker Liniebelastningen langs et Kors, hvis Arme  $\lambda_x, \lambda'_x$  og  $\lambda_y, \lambda'_y$  er parallelle med Rektangelets Sider, hvorved dette deles i fire Ruder, som vist i Fig. 8, kan som *Green's* Funktion  $F$  bruges Ligningerne for fire hyperbolske Paraboloider med Ordinater Nul langs Reaktionskurven og fælles Ordinater (som varierer efter rette Linier) langs Belastningskorset.

Akserne i Hovedkoordinatsystemet  $(x, y)$  lægges parallelt med Reaktionskurvens to Sidepar. For hver af de

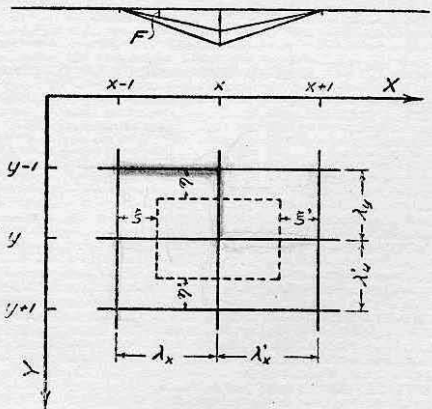


Fig. 8.

<sup>1)</sup> Ligning (29) for  $U$  eller  $u$  stemmer overens med den Form for Pladers Differensligninger, som angives af *N. J. Nielsen* l. c., men er dog en Forbedring, idet Knudepunktstrykket i (29) er veldefineret.

fire hyperholske Paraboloider  $F$  vælges et dermed parallelt sekundært Koordinatsystem  $(\xi, \eta)$  med Begyndelsespunkter i Reaktionsrektangelets 4 Hjørner.

I hver Rude bliver Ligningen for  $F$  da af Formen

$$F = F_{xy} \frac{\xi \cdot \eta}{\lambda_x \cdot \lambda_y}, \quad (30)$$

hvor  $F_{xy}$  er Funktionsværdien i Korsets Midte.

At disse Funktioner tilfredsstiller Randbetingelsen  $F = 0$  langs Reaktionsrektangelets Sider og  $\Delta F = 0$  i alle Punkter af Ruderne, ses umiddelbart.

Til Betegnelse af de to Sæt rette Linier, Systemlinierne i Belastnings- og Reaktionskurve anvendes Nummerering af deres Skæringspunkter med Hovedkoordinatsystemets Akser, saaledes som vist i Fig. 8. Størrelser, som refererer sig til en Linie, faar Liniens Nummer som Enkeltindex, og Størrelser, som refererer sig til et Punkt, faar de to skærende Liniers Numre som Dobbeltindex.  $\lambda_x$  og  $\lambda_y$  kaldes Faglængderne.

For en Plade med Belastning  $p$  findes nu af (25) for Skalar-Momenterne

$$\int F p dx dy = \left[ \begin{aligned} & \int_0^{\lambda_x} U_{y-1} \left( -F_{xy} \frac{\xi}{\lambda_x} \frac{1}{\lambda_y} \right) d\xi + \int_0^{\lambda_x'} U_{y-1} \left( -F_{xy} \frac{\xi'}{\lambda_x'} \frac{1}{\lambda_y} \right) d\xi' \\ & + \int_0^{\lambda_y} U_{x-1} \left( -F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_y} \frac{1}{\lambda_x} \right) d\eta + \int_0^{\lambda_y'} U_x \left( F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_y} \frac{1}{\lambda_x} + F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_y} \frac{1}{\lambda_x'} \right) d\eta \\ & + \int_0^{\lambda_y} U_{x+1} \left( -F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_y} \frac{1}{\lambda_x'} \right) d\eta \\ & + \int_0^{\lambda_x} U_y \left( F_{xy} \frac{\xi}{\lambda_x} \frac{1}{\lambda_y} + F_{xy} \frac{\xi}{\lambda_x} \frac{1}{\lambda_y'} \right) d\xi \\ & + \int_0^{\lambda_x'} U_y \left( F_{xy} \frac{\xi'}{\lambda_x'} \frac{1}{\lambda_y} + F_{xy} \frac{\xi'}{\lambda_x'} \frac{1}{\lambda_y'} \right) d\xi' \\ & + \int_0^{\lambda_y'} U_{x-1} \left( -F_{xy} \frac{\eta'}{\lambda_y'} \frac{1}{\lambda_x} \right) d\eta' + \int_0^{\lambda_y'} U_x \left( F_{xy} \frac{\eta'}{\lambda_y'} \frac{1}{\lambda_x} + F_{xy} \frac{\eta'}{\lambda_y'} \frac{1}{\lambda_x'} \right) d\eta' \\ & + \int_0^{\lambda_y'} U_{x+1} \left( -F_{xy} \frac{\eta'}{\lambda_y'} \frac{1}{\lambda_x'} \right) d\eta' \\ & + \int_0^{\lambda_x} U_{y+1} \left( -F_{xy} \frac{\xi}{\lambda_x} \frac{1}{\lambda_y'} \right) d\xi + \int_0^{\lambda_x'} U_{y+1} \left( -F_{xy} \frac{\xi'}{\lambda_x'} \frac{1}{\lambda_y'} \right) d\xi' \end{aligned} \right] \quad (31)$$

For den blaa  
Skæring er  
den = det s  
albo  
 $\int U_y (-\frac{dF}{dx})$   
 $\int_0^{\lambda_x} U_{y-1} (-\frac{F_{xy}}{\lambda_x \lambda_y})$   
Disse led  
til de andre  
og referer til  
Ombredene

De ikke underbegede led er ledene  $\int U_y \eta d\eta$  hvor  $\eta$  referer til Belastning

1. Da  $\eta$  her er  $\xi$   $\int_0^{\lambda_x} U_y \eta d\eta = \int_0^{\lambda_x} U_y \xi d\xi$  (herunder)  $\int_0^{\lambda_x'} U_y \eta' d\eta' = \int_0^{\lambda_x'} U_y \xi' d\xi'$  (herover) =  $F_{xy} \frac{d\xi}{d\xi} \frac{\eta}{\lambda_x \lambda_y} - F_{xy} \frac{d\xi'}{d\xi'} \frac{\eta'}{\lambda_x' \lambda_y}$

$\int U_x \eta d\eta = \int U_x \left( F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_x \lambda_y} + F_{xy} \frac{\eta}{\lambda_x' \lambda_y} \right) d\eta$  (og de

Ved Division med  $F_{xy}$  paa begge Sider af Lighedstegnet bliver venstre Side

$$P_{xy} = \int_f \frac{F}{F_{xy}} p dx dy. \quad (32)$$

Da  $F : F_{xy}$  er lig 1 i Punkt  $(x, y)$ , ses, at  $P_{xy}$  betyder Knudepunkts-trykket i Punkt  $(x, y)$ , naar Belastningen tænkes at virke indirekte paa Pladen gennem et simpelt understøttet Ristværk i hver Rude.

Ved samtidig Omordning af Leddene paa højre Side af Lighedstegnet i (31) faas Formen :

$$-P_{xy} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_y} \int_0^{\lambda_y} \left( \frac{U_{x-1} - U_x}{\lambda_x} - \frac{U_x - U_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \eta d\eta \\ & + \frac{1}{\lambda'_y} \int_0^{\lambda'_y} \left( \frac{U_{x-1} - U_x}{\lambda_x} - \frac{U_x - U_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \eta' d\eta' \\ & + \frac{1}{\lambda_x} \int_0^{\lambda_x} \left( \frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi d\xi \\ & + \frac{1}{\lambda'_x} \int_0^{\lambda'_x} \left( \frac{U_{y-1} - U_y}{\lambda_y} - \frac{U_y - U_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \xi' d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

De paa højre Side af Lighedstegnet i (35) indgaende Værdier af  $U$  henhører udelukkende til Reaktionsrektangelets og Belastningskorsets Linier, Systemlinierne, og Leddene paa højre Side ses saaledes at betyde

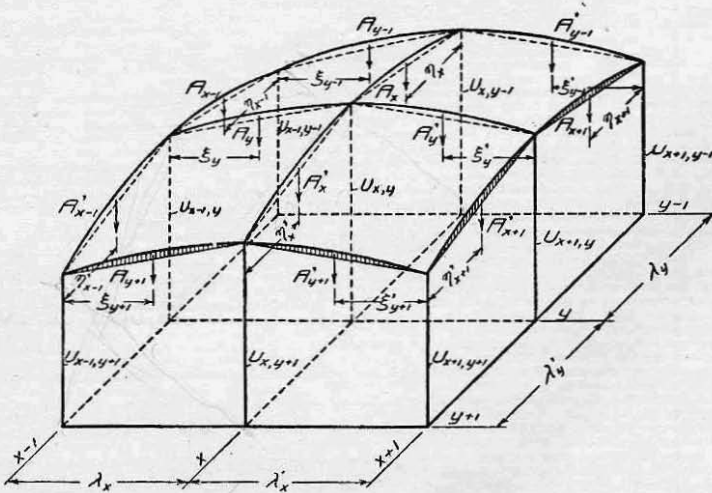


Fig. 9.



Trykkene fra de paa nævnte Linier staaende  $\frac{U}{\lambda}$ -Flader fordelt paa Belastningskorsets Endepunkter og Midtpunkt efter Reglerne for indirekte Belastning som ved Bjælker.

Man kan derfor som vist i Fig. 9 ligesom ved Bjælker dele Systemliniernes  $U$ -Flader i en nedre trapezoidal Del, som er bestemt alene ved Værdierne af  $U$  i Systempunkterne, og en øvre Del ( $A$  eller  $A'$ ), som afhænger af  $U$ -Fladens Forløb mellem disse Punkter.

Som Ligning for Systempunkternes  $U$ -Værdier fremkommer herefter følgende Form:

$$-P_{xy} = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{x-1,y-1} U_{x-1,y-1} + \alpha_{x,y-1} U_{x,y-1} + \alpha_{x+1,y-1} U_{x+1,y-1} + \\ \alpha_{x-1,y} U_{x-1,y} - 8\alpha_{xy} U_{xy} + \alpha_{x+1,y} U_{x+1,y} + \\ \alpha_{x-1,y+1} U_{x-1,y+1} + \alpha_{x,y+1} U_{x,y+1} + \alpha_{x+1,y+1} U_{x+1,y+1} \end{array} \right\} + [A]_{xy}, \quad (34)$$

hvor

$$\alpha_{x-1,y-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda_y} \right), \quad \alpha_{x,y-1} = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\lambda_x}{\lambda_y} - \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + 2 \frac{\lambda'_x}{\lambda_y} - \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} \right), \quad \alpha_{x+1,y-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} + \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} \right),$$

$$\alpha_{x-1,y} = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\lambda'_y}{\lambda_x} - \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} + 2 \frac{\lambda_y}{\lambda_x} - \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} \right), \quad \alpha_{xy} = \frac{1}{8} \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_y} + \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} + \frac{\lambda'_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} + \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} + \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} \right),$$

$$\alpha_{x+1,y} = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\lambda'_y}{\lambda_x} - \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} + 2 \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} - \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} \right), \quad \alpha_{x-1,y+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda'_y}{\lambda_x} + \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} \right),$$

$$\alpha_{x,y+1} = \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\lambda_x}{\lambda'_y} - \frac{\lambda_y}{\lambda_x} + 2 \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} - \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} \right), \quad \alpha_{x+1,y+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda'_y}{\lambda'_x} + \frac{\lambda'_x}{\lambda'_y} \right)$$

og

$$[A]_{xy} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\lambda_y} \left( \frac{A_{x-1} \eta_{x-1} - A_x \eta_x}{\lambda_x} - \frac{A_x \eta_x - A_{x+1} \eta_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \\ + \frac{1}{\lambda'_y} \left( \frac{A'_{x-1} \eta'_{x-1} - A'_x \eta'_x}{\lambda_x} - \frac{A'_x \eta'_x - A'_{x+1} \eta'_{x+1}}{\lambda'_x} \right) \\ + \frac{1}{\lambda_x} \left( \frac{A_{y-1} \xi_{y-1} - A_y \xi_y}{\lambda_y} - \frac{A_y \xi_y - A_{y+1} \xi_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \\ + \frac{1}{\lambda'_x} \left( \frac{A'_{y-1} \xi'_{y-1} - A'_y \xi'_y}{\lambda_y} - \frac{A'_y \xi'_y - A'_{y+1} \xi'_{y+1}}{\lambda'_y} \right) \end{array} \right\}$$

Inddeles hele Pladen i rektangulære Ruder ved to paa hinanden vinkelrette Systemer af parallelle Linier med Nummerering som antydnet i Fig. 8 og 9 faas for hvert Systempunkt en Ligning som (34), der kan udledes af denne ved Ændring af Indices. Ligning (34) kan da opfattes som Differensligningen til Bestemmelse af Skalar-Momenterne i Systempunkterne.

Til Bestemmelse af Nedbøjningerne  $u$  faas en lignende Differensligning, hvor  $P_{xy}$  blot skal bestemmes for  $\frac{U}{D}$  som Belastning.

Vælges specielt alle Faglængder  $\lambda$  ligestore, bliver alle Værdierne af  $\alpha$  i (34) lig 1.

Hvis Faglængderne vælges saa smaa, at  $U_z$ -Fladen kan regnes (tilnærmet) retliniet mellem Systempunkterne, falder Bidraget  $[A]_{xy}$  bort.

Ved store Faglængder kan Bidraget  $[A]_{xy}$  fra  $A_z$ -Fladerne ikke udledes. I saadanne Tilfælde maa man derfor skønne  $A_z$ -Fladernes Form mellem tre paa hinanden følgende Systempunkter. Ved Hjælp af Strækfladen, hvis Hovedform ikke er vanskelig at danne sig et Begreb om, kan Skønnet gøres tilstrækkelig godt til allerede ved første Gennemregning at faa en god Tilnærmelse, som eventuelt kan forbedres ved Omregning. Som brugelige Kurver til Begrænsning af skønnede  $A_z$ -Flader kan i de fleste almindelige Tilfælde med Fordel benyttes Parabelbuer ved kontinuerte Belastninger og Parabelbuer eller rette Linier ved Enkeltkræfter.

Ved rektangulære (ikke altfor aflange) Plader kan man gaa helt ned til eet Systempunkt paa Pladen, medens Resten ligger paa Omkredsen. Ved simpelt understøttede Plader opnaas herved explicite Udtryk for  $U$  (og  $u$ ) i ethvert af Pladens Punkter.

Ved meget aflange rektangulære Plader vælges eet Systempunkt for den korte Led og paa den lange Led saa mange, at Faglængderne bliver omtrent Halvdelen af den korte Spændvidde. Ved simpelt understøttede Plader faas da eet Sæt *Clapeyron'ske* Ligninger for  $U$  og ligeledes for  $u$ .

Specielt for cylindrisk deformerede Plader (Bjælker) bliver med  $Y_z$ -Aksen som Frembringerretning:

$$A_{x-1} = A'_{x-1} = A_x = A'_x = A_{x+1} = A'_{x+1} = 0, \\ A_{y-1} \simeq A_y \simeq A_{y+1} \quad \text{og} \quad A'_{y-1} \simeq A'_y \simeq A'_{y+1},$$

hvoraf ses, at  $[A]_{xy} = 0$ . Endvidere er

$$U_{x-1,y-1} = U_{x-1,y} = U_{x-1,y+1} = M_{x-1}, \quad U_{x,y-1} = U_{xy} = U_{x,y+1} = M_x \quad \text{og} \\ U_{x+1,y-1} = U_{x+1,y} = U_{x+1,y+1} = M_{x+1}.$$

Af (34) faas da for Pladebredden 1:

$$-P_{xy} = \frac{M_{x-1} - M_x}{\lambda_x} - \frac{M_x - M_{x+1}}{\lambda'_x},$$

der er velkendt som Bjælkens Differensligning.

At Ledet  $[A]_{xy}$  forsvinder identisk ved Bjælker og ikke ved Plader, er altsaa den fundamentale Forskel paa de to Tilfælde.

### 3. Andre Reaktionskurver.

*Green'ske* Funktioner kan antage mange andre Former end de nævnte.

Ved simpelt understøttede polygonale Plader kan man ofte med Fordel vælge *Green'ske* Funktioner, hvis Strækflader fremkommer ved straa-

leformet Liniebelastning fra et Punkt til Randpolygonens Vinkelspidser og saaledes faar Form af Pyramideflader. Linieintegralet paa venstre Side i (25) bliver for hver Belastningslinie proportionalt med dens Skalarmomenters Sum, da  $\pi_\sigma$  er konstant, og Randintegralet bliver Nul, da  $U_s$  er lig Nul. Et Eksempel herpaa er vist i Fig. 10 for Centrum af en lige-sidet Trekant. Idet  $\sigma = r$  i denne Figur, faas:

$$\Sigma \pi_r \int_0^r U_r dr = \int_f F \cdot pdf. \quad (35)$$

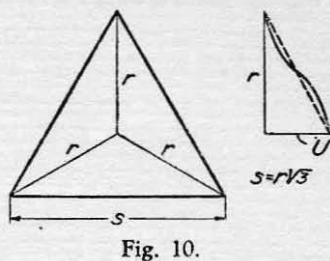


Fig. 10.

### Eksempler.

1. Simpelt understøttet kvadratisk Plade (Sidelinie  $l$ ) med ensformig fordelt Belastning  $p$ , Fig. 11 og 12. Beregning af Skalarmomenter og Nedbøjning.

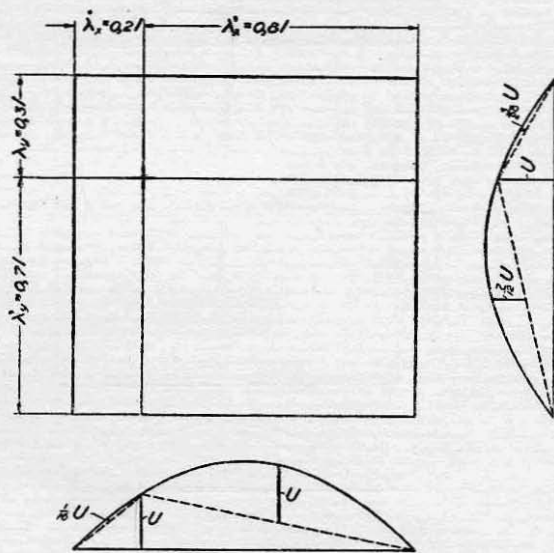


Fig. 11.

Idet Belastningskorsets  $U$ -Flader skønnes at være Parabler med fælles Ordinat  $U$  i Punkt (2,3), som vist i Fig. 11, og Randens  $U$ -Flader er Nul, faas:

Af (32)

$$F_{2,3} = \frac{1}{4} pl^2 (0,2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,7) = \frac{1}{4} pl^2$$

og derefter af (33):

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4} p l^2 = & -\left(\frac{1}{0,2l} + \frac{1}{0,8l}\right) \left[ \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,3l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{28} U \cdot 0,3l \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,7l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{12} U \cdot 0,7l \right) \right] \\
 & - \left( \frac{1}{0,3l} + \frac{1}{0,7l} \right) \left[ \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,2l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} U \cdot 0,2l \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,8l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot U \cdot 0,8l \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} p l^2 = & \frac{1}{3} U \left[ \frac{30}{16} \left( 1 + \frac{3}{28} \right) + \frac{70}{16} \left( 1 + \frac{7}{12} \right) + \frac{20}{21} \left( 1 + \frac{1}{16} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{80}{21} (1 + 1) \right] = \frac{1}{3} U \cdot \frac{5925}{336},
 \end{aligned}$$

$$U = \frac{84}{1975} p l^2 = \frac{1}{23,5} p l^2 = 0,0426 p l^2 \text{ i Punkt } (2,3).$$

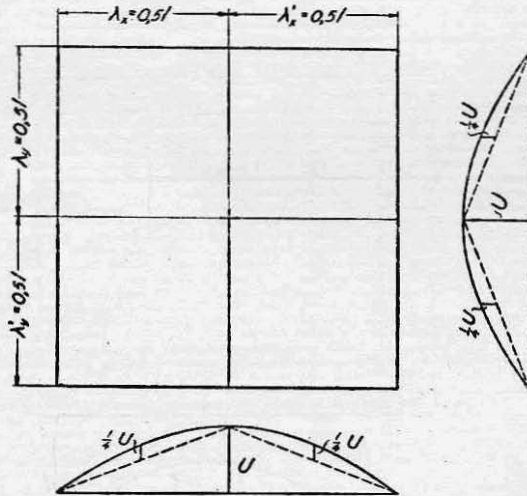


Fig. 12.

For Midtpunktet (5,5) faas med de i Fig. 12 viste paraboliske  $U$ -Flader med fælles Ordinater  $U$  i Punkt (5,5) og idet  $P_{5,5} = \frac{1}{4} p l^2$ :

$$-\frac{1}{4} p l^2 = -\left(\frac{1}{0,5l} + \frac{1}{0,5l}\right) \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} U \cdot 0,5l + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} U \cdot 0,5l \right) \cdot 4,$$

$$\frac{1}{4} p l^2 = \frac{8}{3} U \left( 1 + \frac{1}{4} \right),$$

$$U = \frac{3}{40} p l^2 = 0,075 p l^2 \text{ i Midtpunktet } (5,5).$$

Naar Pladens Skalar-Momenter saaledes er beregnede Punkt for Punkt, kan Nedbøjningerne  $u$  beregnes paa samme Maade af (33).

For Nedbøjningen  $u$  i Pladens Midtpunkt (5,5) faas (med *Leitz's*<sup>1)</sup> Værdier for  $U$  i Tiendedelsspunkterne) af (32):

$$P_{5,5} = \int_D \frac{U}{\lambda_x \lambda_y} dx dy$$

eller ved at opløse Integralet i en Sum:

$$\begin{aligned} P_{5,5} = \frac{pl^2}{D} \cdot 0,1l \cdot 0,1l (0,0736 + 4 \cdot 0,0712 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot 0,0633 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot 0,0498 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot 0,0290 \cdot \frac{4}{5} \\ + 4 \cdot 0,0688 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot 0,0612 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot 0,0481 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} + 8 \cdot 0,0282 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ + 4 \cdot 0,0548 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot 0,0432 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot 0,0256 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \\ + 4 \cdot 0,0344 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 8 \cdot 0,0209 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \\ + 4 \cdot 0,0130 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}), \end{aligned}$$

som udregnes til

$$P_{5,5} = \frac{pl^2}{D} 0,1l \cdot 0,1l \cdot 1,350512,$$

og af (33):

$$-\frac{pl^4}{D} \cdot 0,01350512 = -\frac{8}{3} u \left(1 + \frac{1}{4}\right),$$

$$u = \frac{3}{10} \cdot 0,01351 \frac{pl^4}{D} = 0,004053 \frac{pl^4}{D} \text{ i Midtpunktet (5,5).}$$

2. Simpelt understøttet Plade af Form som en ligesidet Trekant (Side-linie  $s$ ) med ensformig fordelt Belastning  $p$ , Fig. 10.

Af (35) faas for  $U$  i Trekantens Centrum, idet Strækfladepyramidens Toppunktsordinat kaldes  $F_0$ :

$$3\pi_r \int_0^r U_r dr = p \cdot 3 \frac{r^2}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} F_0,$$

$$\pi_r = 2 \frac{F_0}{r} \sqrt{3},$$

$$3 \cdot 2 \frac{F_0}{r} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} U r = p \cdot 3 \frac{r^2}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} F_0,$$

$$U = \frac{1}{12} p r^2 \text{ i Trekantens Centrum.}$$

3. Simpelt understøttet kvadratisk Plade, belastet med en Enkeltkraft  $P$  i Midtpunktet. Beregning af Skalarmomenter i Tiendedelsspunkter.

<sup>1)</sup> *Leitz*: Die Berechnung der frei aufliegenden, rechteckigen Platten. Berlin 1914.

For de Systemlinier, der gaar gennem  $P$ , vælges Parabler som  $U$ -Flader, og for de øvrige Trekanter. Begge Typer er vist i Fig. 13.

For Punkt (2,5) faas med de i Fig. 13 viste  $U$ -Flader af (32)

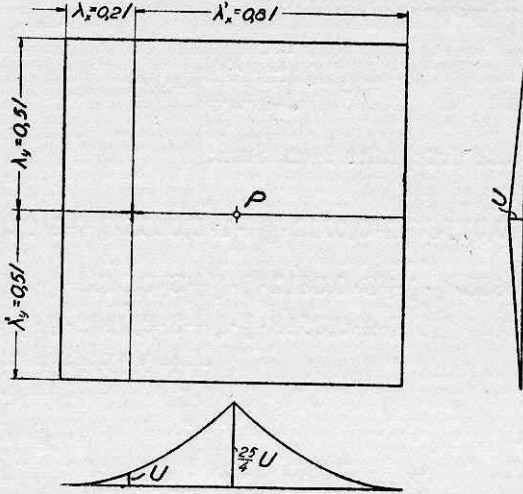


Fig. 13.

$$P_{2,5} = P \cdot \frac{0,5l}{0,8l} = \frac{5}{8} P$$

og derefter af (33)

$$-\frac{5}{8} P = -\left(\frac{1}{0,2l} + \frac{1}{0,8l}\right) \left(\frac{1}{2} U \cdot 0,5l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} U \cdot 0,5l \cdot \frac{2}{3}\right) \\ - \left(\frac{1}{0,5l} + \frac{1}{0,5l}\right) \left(\frac{1}{3} U \cdot 0,2l \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} U \cdot 6,05l \cdot \frac{0,4885l}{0,8l}\right).$$

$$U = \frac{1}{11,536} P = 0,0867P \text{ i Punkt (2,5). Leitz har } 0,0933P.$$

For Punkt (2,3) faas med to Trekanter (Toppunkter paa Linier gennem  $P$  parallelle med Pladekanterne) som  $U$ -Flader af (32)

$$P_{2,3} = P \cdot \frac{0,5l}{0,7l} \cdot \frac{0,5l}{0,8l} = \frac{25}{56} P,$$

og derefter af (33)

$$-\frac{25}{56} P = -\left(\frac{1}{0,2l} + \frac{1}{0,8l}\right) \left(\frac{1}{2} U \cdot 0,3l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} U \cdot 0,7l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} U \cdot 0,7l \cdot \frac{1}{3} \frac{0,5l+0,7l}{0,7l}\right) \\ - \left(\frac{1}{0,3l} + \frac{1}{0,7l}\right) \left(\frac{1}{2} U \cdot 0,2l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} U \cdot 0,8l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} U \cdot 0,8l \cdot \frac{1}{3} \frac{0,5l+0,8l}{0,8l}\right).$$

$$U = \frac{1}{15,2} P = 0,0657P \text{ i Punkt (2,3). Leitz har } 0,0664P.$$